

MODEL MATEMATIKA KERUSAKAN HUTAN DENGAN MEMPERHATIKAN FAKTOR INDUSTRI DAN KEBAKARAN

Regina Mohamad ^{1*}, Moh.Dody Afandi Rauf², Narti Lakisa³

^{1,2,3}Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia

*Penulis Korespondensi. Email: egymohamad.rm@gmail.com

Abstrak

Kerusakan sumber daya hutan merupakan masalah lingkungan yang terjadi hampir diseluruh dunia termasuk Indonesia. Untuk melihat dinamika kerusakan hutan di Indonesia, kami melakukan penelitian dengan memperhatikan faktor kepadatan populasi, kegiatan industri, dan kebakaran hutan sebagai penyebab kerusakan hutan. Hal ini dilakukan dengan memodelkan dalam bentuk model matematika berupa sistem persamaan diferensial. Dari model tersebut diperoleh dua jenis titik tetap yaitu titik tetap bebas gangguan (E_1) yang merupakan kondisi dimana hutan belum dipengaruhi oleh faktor apapun dan titik tetap ada gangguan (E_2 , E_3 dan E_4) yang merupakan kondisi dimana hutan telah dipengaruhi oleh kepadatan populasi, industrialisasi dan kebakaran hutan. Dari titik-titik tetap tersebut akan diketahui kestabilan setiap kondisi yang ada. Selanjutnya untuk melihat pengaruh dari faktor-faktor tersebut terhadap hutan Indonesia, dilakukan simulasi model dan diperoleh hasil bahwa kondisi hutan Indonesia sangatlah tergantung dari keempat faktor tersebut.

Kata Kunci: Model Matematika; Kerusakan Hutan; Populasi Penduduk; Industrialisasi; Kebakaran Hutan

1. Pendahuluan

Hutan merupakan sumber daya alam yang dapat dimanfaatkan untuk kesejahteraan manusia karena dapat memberikan sumbangan hasil alam yang cukup besar bagi Negara. Hutan dipandang sebagai suatu ekosistem mengingat hutan dibentuk atau disusun oleh banyak komponen yang masing-masing komponen tidak bisa berdiri sendiri, tidak dapat dipisahkan, bahkan saling mempengaruhi dan saling bergantung [1][2][3].

Indonesia termasuk salah satu negara tropis yang memiliki luas hutan alam yang terluas di dunia diikuti dengan pertumbuhan penduduk yang tinggi. Tingkat kepadatan penduduk yang tinggi menyebabkan kebutuhan akan lahan untuk pembangunan pemukiman penduduk maupun areal industri juga tinggi serta sebagian besar masyarakat Indonesia menggantungkan hidupnya pada sumber daya hutan untuk pemenuhan kebutuhan hidupnya. Penduduk yang terlalu padat mengakibatkan banyak hutan akan hilang digantikan dengan lingkungan pemukiman, perkotaan, dan lain-lainnya [4]. Kegiatan-kegiatan ini mengakibatkan adanya tekanan terhadap sumber daya hutan. Jika pertumbuhan populasi penduduk akan semakin tinggi dan tak terkendali maka hutan akan habis [5].

Berdasarkan catatan Kementerian Kehutanan Republik Indonesia, sedikitnya 1,1 juta hektar atau 2% dari hutan Indonesia menyusut tiap tahunnya. Data Kementerian Kehutanan menyebutkan dari sekitar 130 juta hektar hutan yang tersisa di Indonesia, 42 juta hektar diantaranya sudah habis ditebang. Kerusakan atau ancaman yang paling besar terhadap hutan alam di Indonesia adalah penebangan liar, alih fungsi hutan menjadi perkebunan, kebakaran hutan dan eksploitasi hutan secara tidak lestari baik untuk pengembangan pemukiman, industri, maupun akibat perambahan. Kerusakan hutan yang semakin parah menyebabkan terganggunya keseimbangan ekosistem hutan dan lingkungan disekitarnya [6].

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika turut memberikan peranan penting dalam memodelkan permasalahan kehidupan, salah satunya masalah ekologi [7]. Masalah kerusakan hutan dengan faktor industri dan kebakaran hutan di Indonesia juga dapat diatasi dengan memodelkannya dalam model matematika. Model matematika pada penelitian ini menggunakan model kompartemen dengan pertumbuhan logistik yang mengasumsikan bahwa setiap populasi akan tumbuh dengan daya dukung lingkungannya [8].

Beberapa peneliti telah mempelajari dinamika kerusakan hutan. Pada penelitian sebelumnya Dubey dkk [9] telah menganalisis model matematika nonlinear untuk mempelajari penipisan sumber daya hutan yang disebabkan oleh populasi, tekanan populasi serta industrialisasi. Pada tahun 2010 Dubey dan Narayana [10] menambahkan faktor polusi sebagai penyebab penipisan sumber daya hutan. Menganut dari penelitian Dubey dkk, Vivi dkk [11] telah melakukan penelitian terbaru dengan memperhatikan faktor industrialisasi serta menambahkan kontrol terhadap kepadatan industri. Sementara itu Suci dkk [7] telah menjelaskan model matematika kerusakan hutan dengan memperhatikan faktor kepadatan populasi dan kegiatan industri. Suci dkk [7] membagi variabel faktor kerusakan hutan menjadi tiga yaitu, kepadatan sumber daya hutan (H), kepadatan populasi penduduk (P) dan kepadatan industrialisasi (I).

Berdasarkan penelitian yang dilakukan Suci dkk [7], kami melakukan pengembangan model dengan menambahkan faktor kebakaran hutan sebagai pemicu terjadinya kerusakan hutan. Hal ini bertujuan untuk melihat bagaimana dinamika kerusakan hutan yang dipengaruhi oleh faktor yang lebih kompleks dibandingkan faktor-faktor pada penelitian sebelumnya.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian studi literature (library research) yaitu dengan mengkaji buku, text book, jurnal, dan artikel-artikel ilmiah mengenai model matematika kerusakan hutan.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Memodelkan dan memodifikasi masalah kedalam model matematika,
2. Menentukan titik tetap,
3. Menentukan matriks jacobian,
4. Menganalisis kestabilan titik tetap, dan
5. Simulasi.

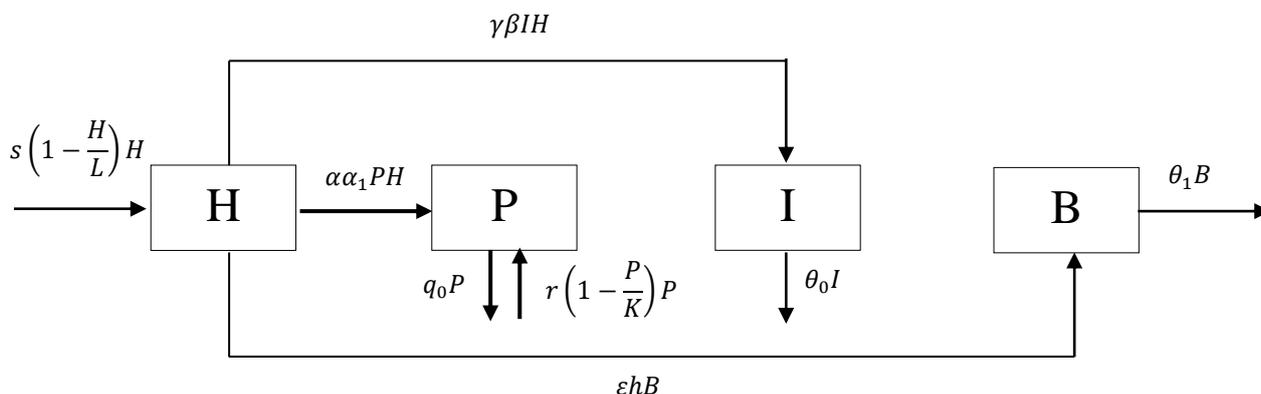
3. Pembahasan

3.1. Model Matematika

Model yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah model kompartemen. Dalam model ini diasumsikan ada faktor kepadatan populasi penduduk (P), kegiatan industri(I), serta kebakaran hutan (B) yang mempengaruhi kerusakan hutan di Indonesia dengan asumsi

1. Pertumbuhan sumber daya hutan dan populasi penduduk dibatasi oleh daya dukung lingkungan
2. Pertumbuhan populasi konstan.
3. Kepadatan sumber daya hutan berbanding terbalik dengan kepadatan penduduk dan industri, semakin tinggi kepadatan penduduk dan kepadatan industri maka semakin rendah kepadatan sumber daya hutan.
4. Perkembangan industri meningkat karena adanya sumber daya hutan yang mendukungnya baik berupa lahan untuk mendirikan industri maupun hasil hutan yaitu kayu sebagai bahan baku industri.
5. Kepadatan populasi penduduk meningkat karena adanya sumber daya hutan yang mendukung kehidupannya.

Berdasarkan asumsi diatas maka model kerusakan hutan dengan memperhatikan faktor industri dan kebakaran dapat digambarkan pada Gambar 1 berikut:



Gambar 1. Model Matematika kerusakan hutan dengan memperhatikan faktor industri dan kebakaran hutan

Berdasarkan diagram kompartmen pada Gambar 1, diperoleh model matematika dalam bentuk system persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = s \left(1 - \frac{h}{L}\right) h - \alpha p h - \beta i h - \varepsilon h b \\ \frac{dp}{dt} = r \left(1 - \frac{p}{K}\right) p - \alpha_1 p h - q_0 p \\ \frac{di}{dt} = \gamma \beta i h - \theta_0 i \\ \frac{db}{dt} = \varepsilon h b - \theta_1 b \end{cases} \quad (1)$$

Keterangan variable dan parameter disajikan pada Tabel 1.

Table 1. Parameter model	
Variabel	Keterangan
s	Laju pertumbuhan alami sumber daya hutan
r	Laju pertumbuhan populasi penduduk
α	Laju kerusakan sumber daya hutan yang disebabkan karena meningkatnya kepadatan populasi penduduk
α_1	Rata-rata populasi yang menggunakan sumber daya hutan untuk kebutuhan hidupnya.
β	Laju kerusakan sumber daya hutan yang disebabkan oleh perkembangan industri
q_0	Laju kematian populasi penduduk secara alami
γ	Laju pertumbuhan industri karena tersedianya sumber daya hutan yang memadai
θ_0	Rata-rata pengendalian industrialisasi oleh pemerintah
ε	Laju kebakaran hutan akibat proses alam dan ulah manusia
θ_1	Rata-rata pengendalian kebakaran hutan oleh pemerintah
K	Daya dukung lingkungan terhadap populasi penduduk
L	Daya dukung lingkungan terhadap sumber daya hutan

3.2. Analisis Kestabilan

3.2.1. Penentuan Titik Tetap

Kestabilan dari populasi dapat ditentukan dengan mencari suatu titik tetap untuk kerusakan hutan. Dalam menentukan titik tetap pada persamaan diferensial (1), titik tetap diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$$

Maka diperoleh dua titik tetap yaitu

1. Titik tetap bebas gangguan (E_1)

Titik tetap bebas gangguan $E_1 = (h, p, i, b)$ terjadi jika $p = 0, i = 0$ dan $b = 0$. Titik tetap ini diperoleh dengan cara substitusi nilai $p, i,$ dan b ke persamaan (1). Maka untuk nilai $h = L$ diperoleh $E_1 = (h, p, i, b) = (L, 0, 0, 0)$.

2. Titik tetap ada gangguan

Titik tetap ada gangguan diperoleh dengan cara eliminasi substitusi persamaan (1) dan diperoleh

➤ Titik tetap kedua

Titik tetap kedua $E_2 = (h, p, i, b)$ terjadi jika $i = 0$ dan $b = 0$. Maka

$$E_2 = (h, p, i, b) = \left(\frac{L(sr - aKr + \alpha q_0 K)}{sr + \alpha^2 \alpha_1 KL}, \frac{Ks(r + \alpha \alpha_1 L - q_0)}{rs - \alpha^2 \alpha_1 KL}, 0, 0 \right)$$

➤ Titik tetap ketiga

Titik tetap ketiga $E_3 = (h, p, i, b)$ terjadi jika $b = 0$. Maka

$$E_3 = (h, p, i, b) = \left(\frac{\theta_0}{\gamma\beta}, \frac{K(\gamma\beta r + \alpha \alpha_1 \theta_0 - q_0 \gamma\beta)}{\gamma\beta r}, \frac{\gamma\beta r s L - r\theta_0 s - \alpha K\gamma\beta r L - \alpha^2 \alpha_1 K\theta_0 L + \alpha K q_0 \gamma\beta L}{\gamma\beta^2 r L}, 0 \right)$$

➤ Titik tetap keempat

Titik tetap keempat $E_4 = (h, p, i, b)$. Maka

$$E_4 = (h, p, i, b) = \left(\frac{\theta_1}{\varepsilon}, \frac{K(\varepsilon r + \alpha \alpha_1 \theta_1 - \varepsilon q_0)}{\varepsilon r}, 0, \frac{s\varepsilon r L - s\theta_1 r - \alpha K\varepsilon r L - \alpha^2 \alpha_1 \theta_1 KL + \alpha \varepsilon q_0 KL}{\varepsilon^2 r L} \right)$$

3.2.2. Kriteria Titik Tetap

1. Titik tetap pertama yaitu keadaan dimana sumber daya hutan selalu ada sebanyak daya dukung lingkungannya yakni sebesar L , sedangkan populasi, industrialisasi dan kebakaran belum ada pada sistem.
2. Titik tetap kedua menunjukkan saat sumber daya hutan dan populasi penduduk ada pada sistem, namun industrialisasi dan kebakaran belum ada pada sistem. Titik E_2 akan ada jika salah satu dari kondisi berikut terpenuhi, yaitu
 - $r(s - aK) + \alpha q_0 K > 0$ maka $s > aK$
 - $r + \alpha \alpha_1 L > q_0$
3. Titik tetap ketiga menunjukkan saat sumber daya hutan, populasi penduduk serta industrialisasi ada pada sistem, namun kebakaran belum ada pada sistem. Titik E_3 akan ada jika salah satu dari kondisi berikut terpenuhi, yaitu
 - $\gamma\beta(r - q_0) + \alpha \alpha_1 \theta_0 > 0$ maka $r > q_0$
 - $\gamma\beta L < \theta_0$
4. Titik tetap keempat menunjukkan saat sumber daya hutan, populasi penduduk serta kebakaran hutan ada pada sistem, namun industrialisasi tidak ada. Titik E_4 akan ada jika salah satu dari kondisi berikut terpenuhi, yaitu
 - $\varepsilon(r - q_0) + \alpha \alpha_1 \theta_1 > 0$ maka $r > q_0$
 - $\varepsilon L < \theta_1$

3.2.3. Menentukan Matriks Jacobian

Untuk menentukan matriks jacobian, dilakukan dengan bantuan program *maple* dan diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} s - \frac{2sh}{L} - \alpha p - \beta i - \varepsilon b & -\alpha h & -\beta h & -\varepsilon h \\ \alpha \alpha_1 p & r - \frac{2rp}{K} - \alpha \alpha_1 h - q_0 & 0 & 0 \\ \gamma\beta i & 0 & \gamma\beta h - \theta_0 & 0 \\ \varepsilon b & 0 & 0 & \varepsilon h - \theta_1 \end{bmatrix}$$

1. Jacobian dari titik tetap pertama (JE_1)

Untuk menentukan matriks jacobian titik tetap pertama, dilakukan dengan bantuan program *maple*, sehingga diperoleh:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -s & -\alpha L & -\beta L & -\varepsilon L \\ 0 & \alpha \alpha_1 L + r - q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\beta L - \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon L - \theta_1 \end{bmatrix}$$

2. Jacobian dari titik tetap kedua (JE_2)

Untuk menentukan matriks jacobian titik tetap kedua, dilakukan dengan bantuan program *maple*, sehingga diperoleh

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} s - \frac{2sH_1}{L} - \alpha P_1 & -\alpha H_1 & -\beta H_1 & -\varepsilon H_1 \\ \alpha \alpha_1 P_1 & r - \frac{2rP_1}{K} - \alpha \alpha_1 H_1 - q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \beta H_1 - \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon H_1 - \theta_1 \end{bmatrix}$$

dengan

$$H_1 = \frac{L(sr - aKr + \alpha q_0 K)}{sr + a^2 \alpha_1 KL}, P_1 = \frac{Ks(r + \alpha \alpha_1 L - q_0)}{rs - \alpha^2 \alpha_1 KL}$$

3. Jacobian dari titik tetap ketiga (JE_3) :

Untuk menentukan matriks jacobian titik tetap ketiga, dilakukan dengan bantuan program *maple*, sehingga diperoleh

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} s - \frac{2sH_2}{L} - \alpha P_2 - \beta J_2 & -\alpha H_2 & -\beta H_2 & -\varepsilon H_2 \\ \alpha \alpha_1 P_2 & r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha \alpha_1 H_2 - q_0 & 0 & 0 \\ \gamma \beta J_2 & 0 & \gamma \beta H_2 - \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon H_2 - \theta_1 \end{bmatrix}$$

dengan

$$H_2 = \frac{\theta_0}{\gamma \beta}, P_2 = \frac{K(\gamma \beta r + \alpha \alpha_1 \theta_0 - q_0 \gamma \beta)}{\gamma \beta r} \text{ dan } J_2 = \frac{\gamma \beta r s L - r \theta_0 s - \alpha K \gamma \beta r L - \alpha^2 \alpha_1 K \theta_0 L + \alpha K q_0 \gamma \beta L}{\gamma \beta^2 r L}$$

4. Jacobian dari titik tetap keempat (JE_4)

Untuk menentukan matriks jacobian titik tetap keempat, dilakukan dengan bantuan program *maple*. Sehingga diperoleh

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} s - \frac{2sH_3}{L} - \alpha P_3 - \varepsilon B_3 & -\alpha H_3 & -\beta H_3 & -\varepsilon H_3 \\ \alpha \alpha_1 P_3 & r - \frac{2rP_3}{K} - \alpha \alpha_1 H_3 - q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \beta H_3 - \theta_0 & 0 \\ \varepsilon B_3 & 0 & 0 & \varepsilon H_3 - \theta_1 \end{bmatrix}$$

dengan

$$H_3 = \frac{\theta_1}{\varepsilon}, P_3 = \frac{K(\varepsilon r + \alpha \alpha_1 \theta_1 - \varepsilon q_0)}{\varepsilon r} \text{ dan } B_3 = \frac{s \varepsilon r L - s \theta_1 r - \alpha K \varepsilon r L - \alpha^2 \alpha_1 \theta_1 KL + \alpha \varepsilon q_0 KL}{\varepsilon^2 r L}$$

3.2.4. Nilai Eigen

1. Nilai eigen dari titik tetap pertama (λ_1) :

Untuk menentukan nilai eigen dari titik tetap pertama, dilakukan dengan bantuan program *maple*, sehingga diperoleh:

$$\lambda_1 = -s, \alpha \alpha_1 L + r - q_0, \gamma \beta L - \theta_0, \varepsilon L - \theta_1$$

2. Nilai eigen dari titik tetap kedua (λ_2) :

Untuk menentukan nilai eigen dari titik tetap kedua, dilakukan dengan cara menyelesaikan persamaan karakteristik, maka akan didapatkan nilai-nilai eigen dari matriks JE_2 , yaitu:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= s - \frac{2sH_1}{L} - \alpha P_1 \\ \lambda_2 &= r - \frac{2rP_1}{K} - \alpha\alpha_1 H_1 - q_0 \\ \lambda_3 &= \gamma\beta H_1 - \theta_0 \\ \lambda_4 &= \varepsilon H_1 - \theta_1\end{aligned}$$

3. Nilai eigen dari titik tetap ketiga (λ_3):

Untuk menentukan nilai eigen dari titik tetap ketiga, dilakukan dengan cara menyelesaikan persamaan karakteristik menggunakan kriteria Routh Hurwitz [12] dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

dengan

$$a_1 = -\left(\left(r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha\alpha_1 H_2 - q_0\right) + \left(s - \frac{2sH_2}{L} - \alpha P_2 - \beta J_2\right) + (\gamma\beta H_2 - \theta_0) + (\varepsilon H_2 - \theta_1)\right)$$

$$\begin{aligned}a_2 &= \left(r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha\alpha_1 H_2 - q_0\right)\left(s - \frac{2sH_2}{L} - \alpha P_2 - \beta J_2\right) + \left(s - \frac{2sH_2}{L} - \alpha P_2 - \beta J_2\right)(\gamma\beta H_2 - \theta_0) \\ &\quad + \left(s - \frac{2sH_2}{L} - \alpha P_2 - \beta J_2\right)(\varepsilon H_2 - \theta_1) + \left(r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha\alpha_1 H_2 - q_0\right)(\varepsilon H_2 - \theta_1) \\ &\quad + \left(r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha\alpha_1 H_2 - q_0\right)(\gamma\beta H_2 - \theta_0) + (\gamma\beta H_2 - \theta_0)(\varepsilon H_2 - \theta_1)(\gamma\beta J_2)(\beta H_2) \\ &\quad + (\gamma\beta J_2)(\beta H_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_3 &= -\left(\left(r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha\alpha_1 H_2 - q_0\right)\left(s - \frac{2sH_2}{L} - \alpha P_2 - \beta J_2\right)(\gamma\beta H_2 - \theta_0) \right. \\ &\quad + \left(s - \frac{2sH_2}{L} - \alpha P_2 - \beta J_2\right)\left(r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha\alpha_1 H_2 - q_0\right)(\varepsilon H_2 - \theta_1) \\ &\quad + \left(s - \frac{2sH_2}{L} - \alpha P_2 - \beta J_2\right)(\varepsilon H_2 - \theta_1)(\gamma\beta H_2 - \theta_0) \\ &\quad + \left(r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha\alpha_1 H_2 - q_0\right)(\varepsilon H_2 - \theta_1)(\gamma\beta H_2 - \theta_0) \\ &\quad \left. + \left(r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha\alpha_1 H_2 - q_0\right)(\gamma\beta J_2)(\beta H_2) + (\varepsilon H_2 - \theta_1)(\gamma\beta J_2)(\beta H_2)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_4 &= \left(\left(r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha\alpha_1 H_2 - q_0\right)\left(s - \frac{2sH_2}{L} - \alpha P_2 - \beta J_2\right)(\gamma\beta H_2 - \theta_0)(\varepsilon H_2 - \theta_1) \right. \\ &\quad \left. + \left(r - \frac{2rP_2}{K} - \alpha\alpha_1 H_2 - q_0\right)(\gamma\beta J_2)(\beta H_2)(\varepsilon H_2 - \theta_1)\right)\end{aligned}$$

4. Nilai eigen dari titik tetap keempat (λ_4):

Untuk menentukan nilai eigen dari titik tetap keempat, dilakukan dengan cara menyelesaikan persamaan karakteristik $\det(\lambda I - JE_4)$ [13], maka diperoleh nilai-nilai eigen dari matriks JE_4 , yaitu:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= s - \frac{2sH_3}{L} - \alpha P_3 - \varepsilon B_3 \\ \lambda_2 &= r - \frac{2rP_3}{K} - \alpha\alpha_1 H_3 - q_0 \\ \lambda_3 &= \gamma\beta H_3 - \theta_0 \\ \lambda_4 &= \varepsilon H_3 - \theta_1\end{aligned}$$

3.2.5. Menganalisis Kestabilan Nilai Eigen

1. Kestabilan Titik Tetap Pertama

Nilai $\lambda_1 < 0$, agar titik tetap E_1 bersifat stabil haruslah $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ dan $\lambda_4 < 0$ sehingga $\alpha\alpha_1 L + r < q_0, \gamma\beta L < \theta_0$ dan $\varepsilon L < \theta_1$. Jika $\alpha\alpha_1 L + r > q_0, \gamma\beta L > \theta_0$ dan $\varepsilon L > \theta_1$ maka E_1 bersifat tidak stabil.

2. Kestabilan Titik Tetap Kedua

Nilai $\lambda_1 < 0$ yakni $s < \frac{2sH_1}{L} + \alpha P_1$, agar titik tetap E_2 bersifat stabil haruslah $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ dan $\lambda_4 < 0$ sehingga $r < \frac{2rP_1}{K} + \alpha\alpha_1 H_1 + q_0, \gamma\beta H_1 < \theta_0$ dan $\varepsilon H_1 < \theta_1$. Jika $r > \frac{2rP_1}{K} + \alpha\alpha_1 H_1 + q_0, \gamma\beta H_1 > \theta_0$ dan $\varepsilon H_1 > \theta_1$ maka E_2 bersifat tidak stabil.

3. Kestabilan Titik Tetap Ketiga

Titik tetap E_3 akan stabil jika dan hanya jika semua nilai eigen adalah real negatif. Hal ini terjadi jika memenuhi syarat sebagai berikut:

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 - \alpha_1^2 a_4 - \alpha_3^2 > 0$$

Karena kondisi $a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 a_4 > 0$, dan $a_1 a_2 a_3 - \alpha_1^2 a_4 - \alpha_3^2 > 0$ terpenuhi, maka titik tetap E_3 bersifat stabil jika $r > q_0$ yaitu saat laju pertumbuhan populasi penduduk lebih besar dari laju kematian alami populasi penduduk dan $\gamma\beta L < 0$, yaitu pada saat rata-rata pengendalian industrialisasi oleh pemerintah lebih besar dari hasil kali dari tingkat pertumbuhan industri dengan tingkat kerusakan sumber daya hutan oleh industrialisasi dan daya dukung lingkungan sumber daya hutan.

4. Kestabilan Titik Tetap Keempat

Nilai $\lambda_1 < 0$, yakni $s < \frac{2sH_3}{L} + \alpha P_3 + \varepsilon B_3$ agar titik tetap E_4 bersifat stabil haruslah $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ dan $\lambda_4 < 0$ sehingga $r < \frac{2rP_3}{K} + \alpha\alpha_1 H_3 + q_0, \gamma\beta H_3 < \theta_0$ dan $\varepsilon H_3 < \theta_1$. Jika $r > \frac{2rP_3}{K} + \alpha\alpha_1 H_3 + q_0, \gamma\beta H_3 > \theta_0$ dan $\varepsilon H_3 > \theta_1$ maka E_4 bersifat tidak stabil.

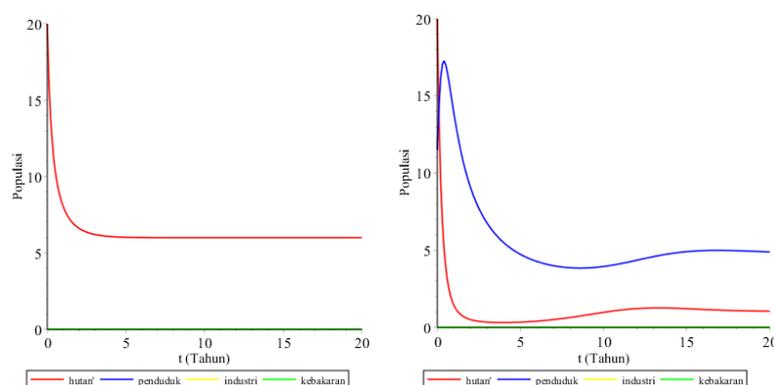
3.3. Simulasi dan Interpretasi Model

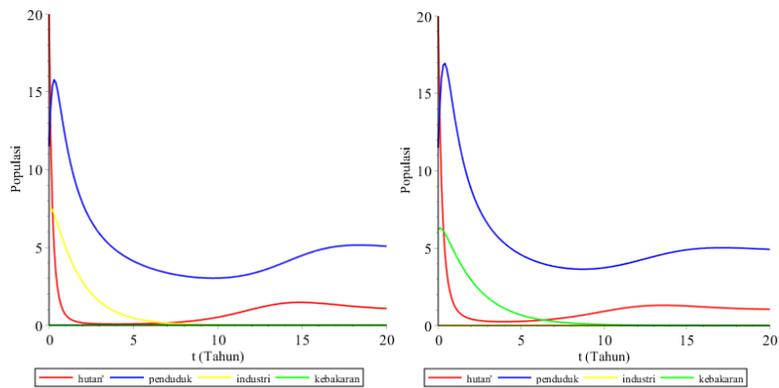
Simulasi ini menggunakan populasi awal $h(0) = 20, p(0) = 11.5, i(0) = 7.5$ dan $b(0) = 6.2$. Untuk simulasi pertama nilai-nilai parameternya berdasarkan asumsi mengikuti syarat kestabilan titik tetap sebagai berikut

Table 2. Nilai-nilai parameter saat titik tetap stabil

Variabel	Keterangan	Nilai
s	Laju pertumbuhan alami sumber daya hutan	1
r	Laju pertumbuhan populasi penduduk	0.3
α	Laju kerusakan sumber daya hutan yang disebabkan karena meningkatnya kepadatan populasi penduduk	0.17
α_1	Rata-rata populasi yang menggunakan sumber daya hutan untuk kebutuhan hidupnya.	1.04
β	Laju kerusakan sumber daya hutan yang disebabkan oleh perkembangan industri	0.2
α_n	Laju kematian populasi penduduk secara alami	0.2
γ	Laju pertumbuhan industri karena tersedianya sumber daya hutan yang memadai	0.21
θ_0	Rata-rata pengendalian industrialisasi oleh pemerintah	0.6
ε	Laju kebakaran hutan akibat proses alam dan ulah manusia	0.04
θ_1	Rata-rata pengendalian kebakaran hutan oleh pemerintah	0.5
K	Daya dukung lingkungan terhadap populasi penduduk	5
L	Daya dukung lingkungan terhadap sumber daya hutan	6

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 2 maka diperoleh grafik dinamika kerusakan hutan dengan menggunakan ditunjukkan pada sebagaimana Gambar 2.

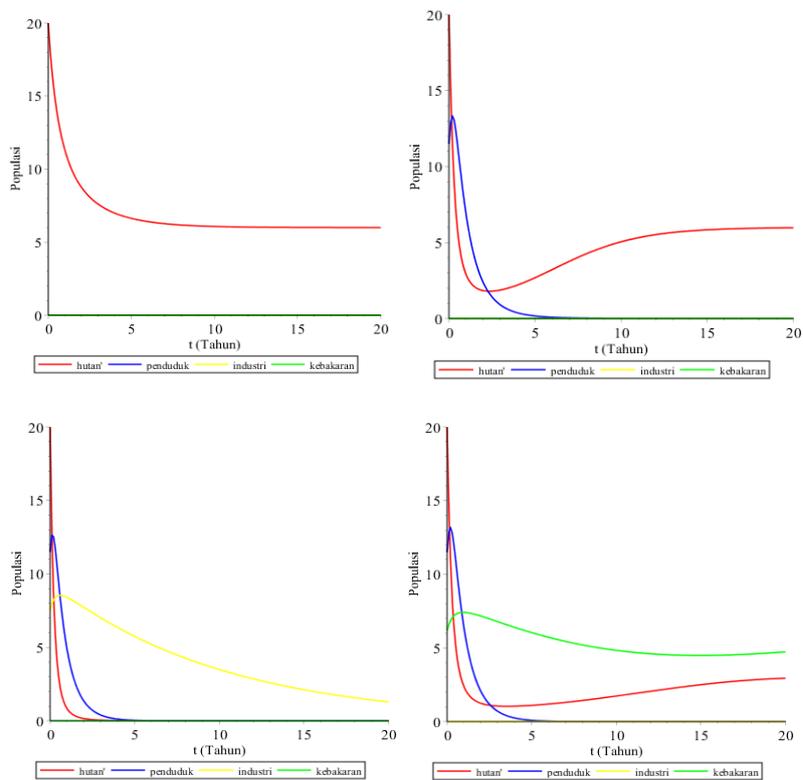




Gambar 2. Dinamika kerusakan hutan saat titik tetap stabil

Pada kondisi ini, berdasarkan nilai-nilai parameter yang mengikuti syarat kestabilannya populasi penduduk (biru) terkendali dalam artian tidak akan mengalami kepunahan, industrialisasi (kuning) dan kebakaran hutan (hijau) akan terus berkurang karena besarnya pengendalian dan penanganan oleh pemerintah. Hal ini menyebabkan kerusakan sumber daya hutan (merah) dapat dikendalikan dan hutan tidak akan punah.

Selanjutnya, simulasi kedua menggunakan parameter yang berbeda yaitu pada saat titik tetap tidak stabil. Nilai-nilai parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 3. Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 3 maka diperoleh grafik dinamika kerusakan hutan dengan menggunakan software maple ditampilkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Dinamika kerusakan hutan saat titik tetap tidak stabil

Pada kondisi ini, nilai-nilai parameter tidak mengikuti syarat kestabilan titik tetap menyebabkan populasi penduduk (biru) akan terus berkurang dan mengalami kepunahan akibatnya sumber daya hutan meningkat, namun industrialisasi (kuning) tidak terkendali menyebabkan hutan akan habis dan pada saat kebakaran hutan (hijau) tidak terkendali hutan mengalami penurunan tapi akan naik saat kebakaran mulai menurun.

Table 3. Nilai-nilai parameter saat titik tetap tidak stabil

Variabel	Keterangan	Nilai
s	Laju pertumbuhan alami sumber daya hutan	0.4
r	Laju pertumbuhan populasi penduduk	0.3
α	Laju kerusakan sumber daya hutan yang disebabkan karena meningkatnya kepadatan populasi penduduk	0.17
α_1	Rata-rata populasi yang menggunakan sumber daya hutan untuk kebutuhan hidupnya.	1.04
β	Laju kerusakan sumber daya hutan yang disebabkan oleh perkembangan industri	0.2
q_0	Laju kematian populasi penduduk secara alami	1.5
γ	Laju pertumbuhan industri karena tersedianya sumber daya hutan yang memadai	0.21
θ_0	Rata-rata pengendalian industrialisasi oleh pemerintah	0.1
ε	Laju kebakaran hutan akibat proses alam dan ulah manusia	0.04
θ_1	Rata-rata pengendalian kebakaran hutan oleh pemerintah	0.1
K	Daya dukung lingkungan terhadap populasi penduduk	5
L	Daya dukung lingkungan terhadap sumber daya hutan	6

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan simulasi model dapat disimpulkan bahwa apabila kestabilan titik tetap terpenuhi maka setiap faktor penyebab kerusakan hutan akan stabil dan terkendali, akibatnya kerusakan sumber daya hutan terus berkurang dan teratasi. Setiap penduduk yang menggunakan sumber daya hutan harus memperlakukannya secara bijak dan pengendalian kebakaran hutan harus mampu mengatasi kebakaran hutan yang terjadi. Tindakan tegas untuk orang-orang yang melakukan hal-hal yang memicu kebakaran hutan sangatlah perlu agar hutan akan selalu ada dan tidak akan punah.

Referensi

- [1] A. Arief, *Hutan Hakikat dan Pengaruh terhadap Lingkungan*. Jakarta: Yayasan Obor Indonesia, 1994.
- [2] Kadri. W, dkk, *Manual Kehutanan*. Jakarta: Departemen Kehutanan Republik Indonesia, 1992.
- [3] I. Soerianegara and I. A., *Ekologi Hutan Indonesia*. Bogor: Departemen Manajemen Hutan Fakultas Kehutanan Institut Pertanian Bogor, 1982.
- [4] Kristanto and Philip, *Ekologi Industri*. Yogyakarta: ANDI Yogyakarta, 2002.
- [5] Soegianto dan Agoes, *Ilmu Lingkungan Sarana Menuju Masyarakat Berkelanjutan*. Surabaya: Airlangga University Press, 2005.
- [6] World Wide Fund for Nature, "Kehutanan," 2018. [Online]. Available: https://www.wwf.or.id/tentang_wwf/upaya_kami/forest_spesies/tentang_forest_spesies/kehutanan/.
- [7] N. Suci, Arnelis, and M. Rosha, "Model Kerusakan Sumber Daya Hutan di Indonesia," *UNP J. Math.*, vol. 12, pp. 1–6, 2014.
- [8] H. S. Panigoro, *Sistem Dinamik untuk Pemula*. Kota Gorontalo: Ideas Publishishing, 2015.
- [9] B. Dubey, "Modelling the Depletion of Forestry Resources by Population and Population Pressure Augmented Industrialization," *Appl. Math. Model.*, vol. 33, pp. 3002–3014, 2009.
- [10] B. Dubey and A. S. Narayanan, "Modelling effects of industrialization, population and pollution on a renewable resource," *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 11, pp. 2833–2848, 2010.
- [11] Ramdhani and Vivi, "Dynamical System of Modelling the Depletion of Forestry Resources Due to Crowding by Industrialization," *Appl. Math. Sci.*, vol. 9, pp. 4067–4079, 2015.
- [12] L. Keshet, *Mathematical Models in Biology*. New York: Random House, 1998.
- [13] H. Anton, *Elementary Linear Algebra Eighth Edition*. USA: Lehigh Press Inc, 2000.
- [14] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical System*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [15] S. Farlow, *An Introduction to Differential Equation and Their Applications*. New York: McGraw Hill, 1994.