Luas Segibanyak Dalam Pandangan Geometri Analitik

La Arapu

(Dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Haluoleo, email: arapula@rocketmail.com)

Abstrak: Telah dibahas luas segibanyak berdasarkan pandangan geometrik analitik. Jika $A_i(x_i, y_i)$; i=1, 2, ..., n adalah titik sudut segi-n, maka luasnya $L=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1}-x_1 & y_{i+1}-y_1\end{pmatrix}\right|^{(1)}$, asalkan $A_1A_2...A_n$ cembung. Jika $A_1A_2...A_n$ cekung luasnya dapat ditentukan dengan (1) setelah memilih (x_1, y_1) sehingga semua diagonal dari A_1 terletak di dalam atau pada segi-n ini.

Jika suatu segi-n tidak mempunyai A_1, maka dibagi menjadi beberapa segi-n_k; k=1, 2, ..., m sehingga setiap dua segi-n_k yang berdekatan hanya bersekutu pada satu sisi dan setiap segi-n_k ke-i terdapat A_1 sehingga hubungan (1) dapat diterapkan. Jika luas setiap segi-n_k ke-i adalah A_i, maka luas segi-n $L=\sum_{k=1}^{m} A_i^{\ (2)}$.

Kata Kunci: segi-n, cembung, cekung.

PENDAHULUAN

Luas segitiga yang titik-titik sudutnya $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dan $C(x_3, y_3)$ adalah $L_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{pmatrix}\right|^{(3)}$. Selanjutnya untuk sebarang segiempat dengan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ dan $D(x_4, y_4)$ luasnya adalah $L_{\square ABCD} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4-x_2 & y_4-y_2\end{pmatrix}\right|^{(4)}$. Tetapi suatu segiempat merupakan gabungan dari dua segitiga yang bersekutu pada salah satu sisinya. Oleh karena itu segiempat ABCD dapat dipandang sebagai gabungan ΔABC dan ΔACD, sehingga luas segiempat ABCD dapat dinyatakan sebagai $\text{luas}_{\Delta ABC} + \text{luas}_{\Delta ACD}$. Jadi dari sudut pandang ini luas segiempat yang titik sudutnya $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ dan $D(x_4, y_4)$ adalah $L_{\square ABCD} = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{3}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1}-x_1 & y_{i+1}-y_1\end{pmatrix}\right|^{(5)}$. Tetapi hubungan (5) hanya benar apabila segiempat ABCD cembung. Untuk segiempat cekung tidak dapat digunakan hubungan (5) secara langsung, kecuali hubungan (4). Sedangkan hubungan (4) dapat digunakan apabila diagonalnya telah diketahui.

Dari tiga hubungan yang diberikan di atas, pada segiempat keatas baru ditemukan persoalan tidak efisien. Ini terjadi karena semua segitiga cembung, dipihak lain untuk segi-n, n≥4 mungkin cembung atau cekung. Oleh karena itu sebelum menentukan hubungan yang dipakai untuk menghitung luas segi-n ini harus diidentifikasi lebih dahulu. Ini berarti untuk menentukan luas segibanyak (segi-n) secara analitik masih diperlukan pembahasan khusus, sehingga tulisan ini mengangkat judul "Luas segibanyak dalam pandangan geometri analitik".

Materi Pendukung

2.1 Daerah Positif dan Negatif Suatu Garis

Definisi 2.1.1. Diberikan suatu garis g: ax + by + c = 0 dan suatu titik $A(x_1, y_1)$. *Dikatakan bahwa A terletak pada daerah positif, netral dan negatif g apabila g:* $ax_1 + by_1 + c > 0$, *g:* $ax_1 + by_1 + c = 0$ *dan g:* $ax_1 + by_1 + c < 0$ *berturut-turut. Dalam hal g:* $ax_1 + by_1 + c = 0$ *lebih umum dikatakan bahwa A terletak pada g.*

Letak A pada daerah positif, netral dan negatif g kadang-kadang dinotasikan juga dengan g(A)>0, g(A) = 0 dan g(A)<0 berturut-turut.

Selanjutnya diberikan dua titik berbeda P dan Q. Dikatakan bahwa P dan Q terletak pada daerah yang sama dari *g* apabila dipenuhi salah satu dari *i.* $g(P)>0$ dan $g(Q)>0$ atau *ii.* $g(P)<0$ dan $g(Q)<0$ atau *iii.* $g(P) = g(Q) = 0$. Jika tidak demikian dikatakan bahwa P dan Q terletak pada daerah yang berbeda dari *g*.

2.2 Kecembungan suatu segi-n

Sebelum kita melihat kecembungan suatu segi-n, mari kita lihat kecembungan segi-4 lebih dahulu, yang dijelaskan dalam Definisi 2.2.1.

Definisi 2.2.1. Suatu segi-4 ABCD dikatakan cembung apabila memenuhi syarat-syarat; 1. Titik A dan B terletak pada daerah yang sama dari $\overleftrightarrow{CD}$*, 2. Titik B dan C terletak pada daerah yang sama dari* $\overleftrightarrow{AD}$*, 3. Titik C dan D terletak pada daerah yang sama dari* $\overleftrightarrow{AB}$*, dan 4. Titik A dan D terletak pada daerah yang sama dari* $\overleftrightarrow{BC}$*. Apabila tidak, segi-4 ABCD dikatakan cekung.*

Teorema 2.2.2. Setiap segiempat cembung kedua diagonalnya berpotongan.

Bukti Teorema 2.2.2 secara analitik dapat dilihat dalam La Arapu (2010: hal. 68-70). Dan bukti Teorema 2.2.2 secara geometri dapat dilihat dalam Mois (1970: p. 71). Kontraposisi Teorema 2.2.2 adalah "Jika suatu segiempat diagonalnya tidak berpotongan, maka segiempat itu adalah cekung."

Akibat 2.2.3. Setiap segiempat cembung semua diagonalnya terletak pada daerah dalam segiempat itu kecuali titik-titik ujungnya.

Bukti

Diberikan sebarang segi-4 cembung ABCD dengan diagonal $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$. Ambil sebarang X dan Y pada $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ berturut-turut sehingga bukan titik-titik ujungnya. Karena segi-4 ABCD cembung, maka $\overline{AC}$ memotong $\overline{BD}$. Ini berarti $\overline{BD}$ membagi segi-4 ABCD menjadi ΔABD dan ΔBCD. Menurut definisi daerah dalam segi-4, Y terletak pada daerah dalam segi-4 ABCD. Selanjutnya karena segi-4 ABCD cembung, maka $\overline{BD}$ memotong $\overline{AC}$. Ini berarti $\overline{AC}$ membagi segi-4 ABCD menjadi ΔABC dan ΔADC. Menurut definisi daerah dalam segi-4, X terletak pada daerah dalam segi-4 ABCD. Terbukti.

Akibat 2.2.3 sekaligus menjelaskan bahwa apabila suatu segiempat mempunyai diagonal yang tak semuanya terletak di dalam atau pada segiempat itu, maka segiempat itu adalah segiempat cekung. Selanjutnya untuk segi-n dengan $n \geq 5$ selalu dapat dipandang sebagai gabungan segitiga dan segiempat sehingga setiap dua bangun yang berdekatan hanya bersekutu pada satu sisi. Segi-5 lima misalnya dapat dipandang sebagai gabungan suatu segi-4 dan suatu segitiga sehingga hanya bersekutu pada satu sisi. Karena semua segitiga itu cembung, maka kita tinggal menyelidiki kecembungan segiempatnya. Meskipun demikian mungkin saja sisi persekutuan kedua bangun ini dapat membentuk titik sudut cekung. Oleh karena itu Akibat 2.2.3 dapat diperluas pada segi-n untuk $n \geq 5$. Artinya jika suatu segi-n $A_1A_2...A_n$ tidak semua diagonalnya terletak di dalam atau pada segi-n itu, maka segi-n itu cekung. Sebaliknya jika semua diagonal segi-n $A_1A_2...A_n$ ini terletak di dalam atau pada segi-n ini, maka segi-n $A_1A_2...A_n$ cembung.

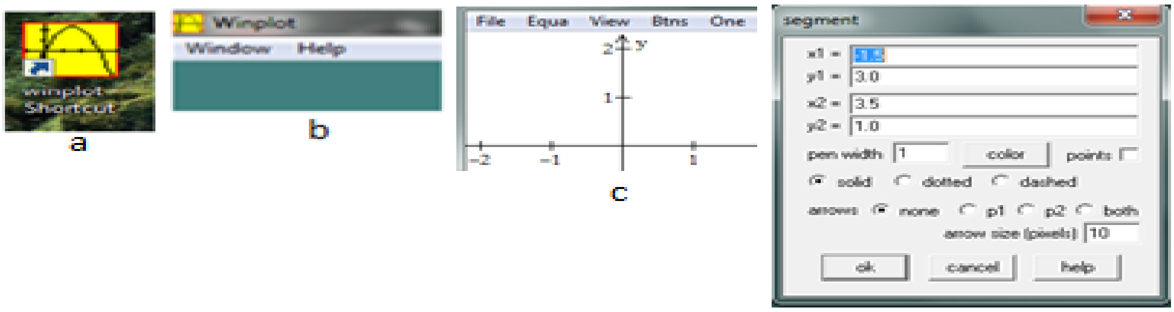
PEMBAHASAN

Definisi 3.1. Segi-n adalah gabungan n-buah ruas garis sehingga ruas garis itu hanya berpotongan di titik-titik ujungnya dan setiap dua ruas garis yang berdekatan tidak terletak pada satu garis. Ruas garis-ruas garis ini disebut sisi segi-n dan titik-titik ujung ruas garis ini disebut titik sudut segi-n. Ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang tidak berdekatan disebut diagonal.

Segi-n yang diberikan dalam Definisi 3.1 masih bersifat umum. Kejadian-kejadian khusus dapat dilihat paling sedikit pada dua cara pandang, yaitu; menurut kekongruenan sisi dan sudutnya dan menurut bentuk daerah dalamnya. Dari kekongruenan sisi dan sudutnya diperoleh segi-n beraturan dan segi-n tak beraturan. Dipandang dari daerah dalamnya diperoleh segi-n cembung dan segi-n cekung.

Definisi 3.2. Diberikan titik-titik tak segaris A_i; i =1, 2, ..., n. Bangun geometri $A_1A_2...A_n$ disebut segi-n beraturan apabila $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ dan $\overline{A_nA_1}$ kongruen dan semua sudut dalamnya kongruen, apabila tidak dikatakan tidak beraturan (Wallace & West, 1992, p.110).

Segitiga sama sisi dan persegi adalah dua contoh segi-n beraturan untuk n = 3 dan n = 4 berturut-turut. Segitiga siku-siku dan layang-layang yang bukan belah ketupat adalah dua contoh segi-n tak beraturan untuk n = 3 dan n = 4 berturut-turut.



Gbr. 3.1

Pembahasan luas segi-n pada Definisi 3.1 dapat dilakukan dengan menggunakan hubungan yang telah diberikan di atas. Tetapi untuk menentukan hubungan mana yang harus untuk menentukan luas suatu segi-n, kita harus mengidentifikasi segi-n ini lebih dahulu.

Adapun penjelasan jenis segi-n menurut daerah dalamnya telah diberikan pada perluasan kecembungan segiempat pada akhir 2.2. Akibat dari penjelasan ini adalah setiap segi-n beraturan adalah segi-n cembung. Ini berarti untuk mengidentifikasi suatu segi-n harus ada plot bangun ini.

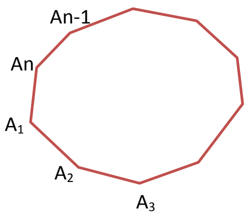
Ada beberapa program paket yang dapat digunakan untuk plotting suatu bangun segi-n. Salah satu yang paling sederhana adalah program paket "winplot" asalkan koordinat titik-titik sudutnya diketahui. Untuk mengakses paket program ini tinggal mengarahkan kursor ke ikon program ini seperti yang tampak pada Gbr.3.1(a) kemudian melakukan double klik.

Pandang suatu ruas garis $\overline{AB}$ dengan $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$. Untuk membuat plot $\overline{AB}$ pada paket program winplot urutan kerja yang harus dilakukan setelah klik dua kali pada ikon winplot adalah memilih window pada tampilan Gbr. 3.1(b). Pilihan 2-dim pada Gbr. 3.1(b) akan menampakkan tampilan seperti pada Gbr. 3.1(c). Dengan memilih segment setelah melakukan klik pada Equa dalam Gbr. 3.1(c) akan menampakkan alternatif (x, y) dan (r, t). Untuk keperluan plotting ruas garis ini kita harus memilih (x, y) yang akan menampakkan form seperti pada Gbr. 3.1(d). Plotting ruas garis $\overline{AB}$ akan tampak pada Gbr. 3.1(c) setelah mengisi form pada Gbr. 3.1(d) dengan absis dan ordinat A dan B lalu klik ok. Ini berarti untuk membuat plotting suatu segi-n kita harus melakukan plot pada semua sisinya. Plotting suatu segi-n mungkin cembung atau cekung.

3.3 Luas segi-n Cembung

Misalkan plotting suatu segi-n adalah cembung seperti pada Gbr. 3.2. Menurut perluasan kecembungan segiempat berarti semua diagonal dari setiap titik sudut segi-n terletak di dalam segi-n ini kecuali titik-titik ujungnya. Jadi dari titik sudut A_1 dapat dibentuk diagonal-diagonal $\overline{A_1A_j}$, j =3, 4, ..., n-1 yang semuanya berada dalam segi-n ini kecuali titik-titik ujungnya. Ini berarti segi-n merupakan gabungan $\Delta A_1A_iA_{i+1}$; i = 2, 3, ..., n-1. Misalkan $A_i(x_i, y_i)$; i = 1, 2, ..., n. Maka menurut hubungan 1.1 luas setiap segitiga tersebut adalah $L_i = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|$, i = 2, 3, ..., n-1. Oleh karena itu luas segi-n ini adalah

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right| \quad (6).$$



Gbr. 3.2

Contoh

Diberikan 5 titik $A_1(-3, -1)$, $A_2(0, 5)$, $A_3(3, 7)$, $A_4(6, 8)$ dan $A_5(8, 0)$. Plot segi-5 $A_1A_2A_3A_4A_5$! Jika cembung tentukan luasnya!

Penyelesaian

Plotting segi-5 $A_1A_2A_3A_4A_5$ tampak seperti pada Gbr.3.3 dengan skala 1:2. Berdasarkan plot-ting ini ternyata diagonal segi-5 yang dapat dibentuk pada setiap A_i; i =1, 2, ..., 5 semuanya terletak di dalam segi-5, kecuali titik-titik ujungnya. Ini berarti segi-5 pada Gbr. 3.3 cembung. Jadi menurut hubungan (6) luas segi-5 ini adalah

$L_5 = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{4}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|$. Karena

$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 0+3 & 5+1 \\ 3+3 & 7+1 \end{pmatrix}\right| = 6$,

$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 3+3 & 7+1 \\ 6+3 & 8+1 \end{pmatrix}\right| = 9$

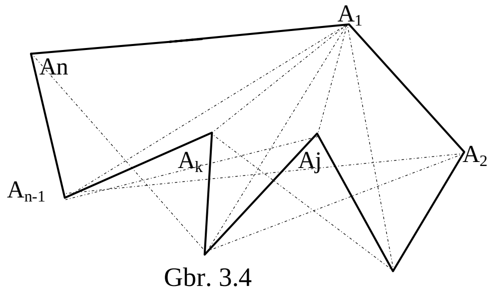
dan $\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \\ x_5 - x_1 & y_5 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 6+3 & 8+1 \\ 8+3 & 0+1 \end{pmatrix}\right| = 45$,

maka $L_5 = 60$ satuan luas.

3.4 Luas segi-n Cekung

Misalkan plotting suatu segi-n adalah cekung. Segi-n yang cekung dapat dike-lompokkan dalam dua jenis, yaitu; segi-n cekung yang mempunyai titik sudut sehingga semua diagonal dari titik sudut itu terletak di dalam atau pada segi-n itu dan segi-n yang tak mempunyai titik sudut yang demikian.

Selanjutnya misalkan plotting segi-n



Gbr. 3.4

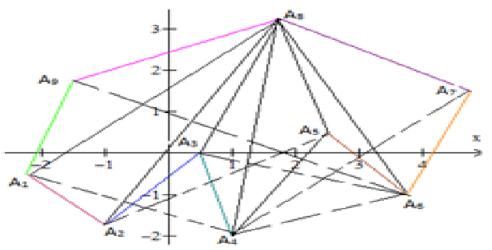
adalah segi-n cekung jenis pertama seperti tampak pada Gbr.3.4. Semua diagonal dari setiap titik sudut terdapat diagonal yang selain titik-titik ujungnya berada diluar segi-n kecuali titik sudut A_1. Oleh karena itu segi-n ini dapat dibentuk dari segitiga-segitiga $\Delta A_1A_iA_{i+1}$; i = 2, 3, ..., n-1. Jadi luas segi-n ini adalah hubungan (6). Meskipun demikian perlu ditegaskan bahwa A_1 pada segi-n cekung tidak dapat diambil sebarang dari titik sudut segi-n ini. Disini hanya benar jika A_1 adalah titik sudut segi-n sehingga semua diagonal dari A_1 terletak di dalam atau pada segi-n ini.

Tidak benar apabila A_1 diganti dengan A_2, sebab terdapat diagonal $\overline{A_2A_{j+1}}$ dan $\overline{A_2A_{n-1}}$ dari A_2 yang selain titik-titik ujungnya berada diluar segi-n ini. Demikian juga apabila A_1 diganti A_3, sebab terdapat diagonal $\overline{A_3A_k}$ dari A_3 yang selain titik-titik ujungnya berada diluar segi-n ini. Penggantian A_1 dengan A_m, m = 4, 5, ..., n tetap tidak benar, sebab selalu dapat ditunjukkan adanya diagonal dari A_m yang selian titik-titik ujungnya berada di luar segi-n ini.

Penetapan segitiga dengan titik sudut A_1 dan titik sudut yang diagonal dari titik sudut itu selain titik-titik ujungnya berada diluar segi-n ini adalah salah. Hal ini terjadi karena ada sisi $\Delta A_mA_pA_{p+1}$; $1 \le p \ne m \le n$ yang terletak di luar segi-n ini, sehingga berakibat $\sum_{1 \le p \ne m \le n} L_{\Delta A_mA_pA_{p+1}} > L_n$, dengan: $L_{\Delta A_mA_pA_{p+1}}$ = luas segitiga ke-p; $1 \le p \ne m \le n$ dan L_n = luas segi-n.

Contoh

Diberikan 9 titik-titik $A_1(-9/2, -1)$, $A_2(-2, -7/2)$, $A_3(1, 0)$, $A_4(2, -4)$, $A_5(5, 1)$,



Gbr. 3.5

$A_6(15/2, -2)$, $A_7(19/2, 3)$, $A_8(3/2, 13/2)$ dan $A_9(-3, 7/2)$. Plot segi-9 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ dan tentukan luasnya!

Penyelesaian

Plotting segi-9 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ tampak seperti pada Gbr.3.5 dengan skala 1:2. Dari plotting ini ternyata hanya dari titik sudut A_8 yang semua diagonalnya terletak di dalam dan pada segi-9. Oleh karena luas segi-9 ini dapat ditentukan dengan hubungan (6) lagi setelah mengambil A_8 sebagai A_1 dan mengganti nama-nama titik-titik sudut lainnya menjadi $A_9 = A_2$, $A_1 = A_3$, $A_2 = A_4$, $A_3 = A_5$, $A_4 = A_6$, $A_5 = A_7$, $A_6 = A_8$ dan $A_7 = A_9$. Jadi luas segi-9 ini adalah

$$L_9 = \tfrac{1}{2}\sum_{i=2}^{8}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|. \text{ Tetapi}$$

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -3-\frac{3}{2} & \frac{7}{2}-\frac{13}{2} \\ -\frac{9}{2}-\frac{3}{2} & -1-\frac{13}{2} \end{pmatrix}\right| = 7{,}875,$$

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -\frac{9}{2}-\frac{3}{2} & -1-\frac{13}{2} \\ -2-\frac{3}{2} & -\frac{7}{2}-\frac{13}{2} \end{pmatrix}\right| = 16{,}875,$$

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \\ x_5 - x_1 & y_5 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -2-\frac{3}{2} & -\frac{7}{2}-\frac{13}{2} \\ 1-\frac{3}{2} & 0-\frac{13}{2} \end{pmatrix}\right| = 8{,}875,$$

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_5 - x_1 & y_5 - y_1 \\ x_6 - x_1 & y_6 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2} & 0-\frac{13}{2} \\ 2-\frac{3}{2} & -4-\frac{13}{2} \end{pmatrix}\right| = 4{,}25,$$

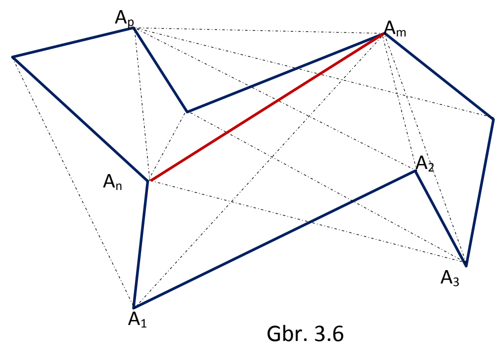
$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_6 - x_1 & y_6 - y_1 \\ x_7 - x_1 & y_7 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2-\frac{3}{2} & -4-\frac{13}{2} \\ 5-\frac{3}{2} & 1-\frac{13}{2} \end{pmatrix}\right| = 17,$$

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_7 - x_1 & y_7 - y_1 \\ x_8 - x_1 & y_8 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 5-\frac{3}{2} & 1-\frac{13}{2} \\ \frac{15}{2}-\frac{3}{2} & -2-\frac{13}{2} \end{pmatrix}\right| = 1{,}625$$

dan

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_8 - x_1 & y_8 - y_1 \\ x_9 - x_1 & y_9 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \frac{15}{2}-\frac{3}{2} & -2-\frac{13}{2} \\ \frac{19}{2}-\frac{3}{2} & 3-\frac{13}{2} \end{pmatrix}\right| = 15.$$

Karena itu luas segi-9 tersebut adalah



Gbr. 3.6

L_9 = 71,5 satuan luas.

Selanjutnya misalkan plotting suatu bangun datar adalah segi-n cekung jenis kedua seperti tampak pada Gbr. 3.6. Tampak pada plot ini bahwa diagonal-diagonal dari setiap titik sudut segi-n ini selalu terdapat diagonal yang selain titik-titik ujungnya terletak di luar segi-n. Ini berarti bahwa hubungan (6) tidak dapat digunakan untuk menentukan luas bangun ini.

Sekarang pandang segi-n ini sebagai gabungan dari segi-(m+1) $A_nA_1A_2...A_m$ dan segi-(n-m+1) $A_nA_mA_{m+1}...A_{n-1}$. Tampak bahwa semua diagonal dari titik sudut A_m pada segi-(m+1) terletak didalam atau pada segi-(m+1) ini. Oleh karena itu dengan mengambil $A_m = A_1$, $A_n = A_2$, $A_1 = A_3$, ..., $A_{m-1} = A_k$, hubungan (6) dapat diterapkan untuk menentukan luas segi-(m+1) ini. Jadi luas segi-(m+1) ini adalah $L_I = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k-1}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|$. Dipihak lain semua diagonal dari titik sudut A_n pada segi-(n-m+1) terletak di dalam atau pada segi-(n-m+1) ini. Oleh karena itu dengan mengambil $A_n = A_1$, $A_m = A_2$, $A_{m+1} = A_3$, ..., $A_{n-1} = A_q$, maka hubungan (6) dapat diterapkan lagi untuk menentukan luas segi-(n-m+1) ini. Jadi luas segi-(n-m+1) ini adalah $L_{II} = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{q-1}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|$.

Ini berarti bahwa luas segi-n pada Gbr. 3.6 adalah $L_n = L_I + L_{II}$(7).

Segi-n pada Gbr. 3.6 dapat juga dibentuk menjadi segi-r dan segi-s yang lain dengan r+s = n+2, sebab semua diagonal dari sudut A_m pada segi-(m+2) $A_nA_1A_2...A_mA_{m+1}$ terletak di dalam atau pada segi-(m+2) ini. Oleh karena itu hubungan (6) dapat diterapkan lagi setelah mengambil $A_m = A_1$, $A_n = A_2$, $A_1 = A_3$, ..., $A_m = A_r$ dan luas segi-r ini adalah $L_r = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r-1}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|$. Demikian juga semua diagonal dari titik sudut A_n pada segi-(n-m) $A_nA_{m+1}A_pA_{p+1}...A_{n-1}$ terletak di dalam atau pada segi-(n-m) ini. Oleh karena itu hubungan (6) dapat diterapkan lagi setelah mengambil $A_n = A_1$, $A_{m+1} = A_2$, $A_p = A_3$, ..., $A_{n-1} = A_s$ dan luas segi-s ini adalah $L_s = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{s-1}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|$.

Dari sudut pandang ini luas segi-n pada Gbr. 3.6 adalah $L_n = L_r + L_s$(8).

Kadang-kadang suatu segi-n cekung jenis kedua belum terdapat titik sudut yang semua diagonal dari titik sudut itu terletak di dalam atau pada segi-n bagian itu, walaupun telah dibentuk dari dua segi-p dan segi-q dengan p+q = n+2. Jika terjadi seperti ini, maka segi-n itu dibentuk dari tiga gangun datar, yaitu; segi-p, segi-q dan segi-r sehingga setiap dua bangun datar yang berdekatan hanya bersekutu pada satu sisi. Pembentukan ini dilakukan sedemikian sehingga setiap bangun datar bagian terdapat titik sudut yang semua diagonalnya terletak di dalam atau pada bangun datar bagian itu. Ini berarti pada setiap bangun datar bagian ini dapat lagi diterapkan hubungan (6). Jika luas setiap bangun datar bagian ini adalah L_p, L_q dan L_r, maka luas segi-n pada Gbr. 3.6 adalah $L_n = L_p + L_q + L_r$(9). Hubungan bilangan-bilangan p, q dan r dengan n dari segi-n dan segi-p, segi-q dan segi-r di atas adalah p + q + r = n + 4(10).

Secara umum jika suatu segi-n cekung tidak terdapat titik sudut sehingga semua diagonal dari titik sudut ini terletak di dalam atau pada segi-n ini, maka segi-n itu harus dibagi menjadi beberapa segi-n_m, m = 1, 2, ..., k bagian sehingga; 1. setiap dua segi-n_m yang berdekan hanya bersekutu pada satu sisi dan 2. setiap segi-n_m ini terdapat titik sudut yang semua diagonal dari titik sudut itu terletak di dalam atau pada segi-n_m ini. Ini berarti pada setiap segi-n_m dapat lagi diterapkan hubungan (6). Jadi jika luas setiap segi-n_m adalah A_m, m = 1, 2, ..., k, maka luas segi-n cekung ini adalah $L_n = \sum_{m=1}^{k} A_m$ (11).

Hubungan n_m dengan n; m = 1, 2, ..., k dari segi-n dan segi-n_m bagian tersebut adalah

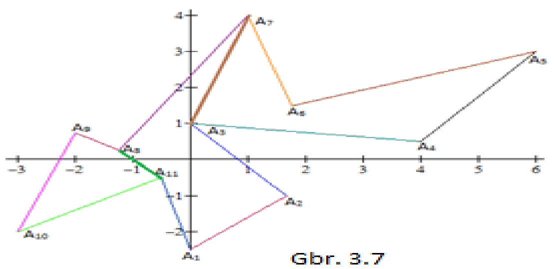
$\sum_{m=1}^{k} n_m = n + 2(k-1)$ (12).

Bukti

Misalkan segi-n cekung yang tidak mempunyai titik sudut sehingga semua diagonal dari titik sudut ini terletak di dalam atau pada segi-n ini. Jika segi-n dibentuk dari dua segi-p dan segi-u sehingga segi-p mempunyai titik sudut yang semua diagonal dari titik sudut ini terletak di dalam atau pada segi-p ini tetapi segi-u tidak mempunyai titik sudut yang demikian, maka diperoleh p + u = n + 2 [1)]. Ini berarti segi-u tidak dapat ditentukan luasnya dengan hubungan (6). Karena itu segi-u dibentuk lagi menjadi segi-q dan segi-v. Jadi q + v = u + 2 atau u = q + v – 2. Karena itu 1) menjadi p + q + v = n + 4 [2)]. Jika hanya pada segi-q terdapat titik sudut sehingga semua diagonal dari titik sudut ini terletak di dalam atau pada segi-q tetapi pada segi-v tidak, maka segi-v dibentuk lagi menjadi segi-r dan segi-w. Jadi diperoleh r + w = v + 2 atau v = r + w – 2. Karena itu 2) menjadi p + q + r + w = n + 6 [3)]. Jika titik sudut yang semua diagonalnya terletak di dalam atau pada segi-n_m setelah segi-n dibentuk dari k segi-n_m; m = 1, 2, ...,k, maka diperoleh $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{p=1}^{k} n_p = n + 2(k\text{-}1)$.

Contoh

Tentukan luas segi-11 $A_1A_2 \ldots A_{11}$ apabila $A_1(0, -2\frac{1}{2})$, $A_2(1\frac{2}{3}, -1)$, $A_3(0, 1)$, $A_4(4, \frac{1}{2})$, $A_5(6, 3)$, $A_6(1\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2})$, $A_7(1, 4)$, $A_8(-2, \frac{3}{4})$, $A_9(-1\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $A_{10}(-3, -2)$ dan



Gbr. 3.7

$A_{11}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$!

Penyelesaian

Plotting segi-11 pada soal ini tampak seperti Gbr. 3.7, suatu segi-11 cekung. Ternyata pada bangun ini tidak terdapat titik sudut sehingga semua diagonal dari titik sudut ini terletak di dalam atau pada segi-11 ini. Oleh karena itu segi-11 ini harus dibagi menjadi segi-5, segi-6 dan segi-4 seperti pada Gbr.3.7, dengan; $A_3A_4A_5A_6A_7$, $A_3A_7A_8A_{11}A_1A_2$ dan $A_8A_9A_{10}A_{11}$ berturut-turut. Pembagian lain mungkin dapat juga dilakukan tetapi jumlah bagian segi-11 ini menjadi tidak minimum atau mengakibatkan tidak dapat diterapkannya hubungan (6). Dari segi-5 $A_3A_4A_5A_6A_7$ hanya semua diagonal dari titik sudut A_6 yang terletak di dalam atau pada segi-5 ini. Oleh karena itu dengan melakukan penggantian $A_6 = A_1$ dan $A_7 = A_2$, kecuali pada titik-titik sudut A_3, A_4 dan A_5 dapat lagi diterapkan hubungan (6) untuk menentukan luas segi-5 ini. Jadi luas segi-5 ini adalah $L_5 = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{4}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|$. Karena

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1-1\frac{3}{4} & 4-1\frac{1}{2} \\ 0-1\frac{3}{4} & 1-1\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = 2{,}375,$$

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 0-1\frac{3}{4} & 1-1\frac{1}{2} \\ 4-1\frac{3}{4} & \frac{1}{2}-1\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = 1{,}4375$$

dan

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \\ x_5 - x_1 & y_5 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 4-1\frac{3}{4} & \frac{1}{2}-1\frac{1}{2} \\ 6-1\frac{3}{4} & 3-1\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = 3{,}8125,$$

maka $L_5 = 7{,}625$ satuan luas.

Selanjutnya dari segi-6 $A_3A_7A_8A_{11}A_1A_2$ hanya semua diagonal dari titik sudut A_3 yang terletak di dalam atau pada segi-6 ini. Oleh karena itu hubungan (6) dapat lagi diterapkan untuk menentukan luas segi-6 ini setelah melakukan penggantian $A_3 = A_1$, $A_7 = A_2$, $A_8 = A_3$, $A_{11} = A_4$, $A_1 = A_5$ dan $A_2 = A_6$. Jadi luas segi-6 ini adalah $L_6 = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{5}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|$. Karena

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1-0 & 4-1 \\ -2-0 & \frac{3}{4}-1 \end{pmatrix}\right| = 5{,}75,$$

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -2-0 & \frac{3}{4}-1 \\ -\frac{1}{2}-0 & -\frac{1}{2}-1 \end{pmatrix}\right| = 1{,}4375,$$

$$\tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \\ x_5 - x_1 & y_5 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-0 & -\frac{1}{2}-1 \\ 0-0 & -2\frac{1}{2}-1 \end{pmatrix}\right| = 1{,}75$$

dan

$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_5 - x_1 & y_5 - y_1 \\ x_6 - x_1 & y_6 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 0-0 & -2\frac{1}{2}-1 \\ 1\frac{2}{3}-0 & -1-1 \end{pmatrix}\right| = 2{,}9167,$

maka L_6 = 11,8542 satuan luas.

Sisanya adalah segi-4 cembung $A_8A_9A_{10}A_{11}$. Dengan mengambil A_8, A_9, A_{10} dan A_{11} sebagai A_1, A_2, A_3 dan A_4 berturut-turut, maka luas segi-4 ini adalah $L_4 = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{3}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|$. Karena

$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -1\frac{1}{4}+2 & \frac{1}{4}-\frac{3}{4} \\ -3+2 & -2-\frac{3}{4} \end{pmatrix}\right| = 3{,}15625$

dan

$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -3+2 & -2-\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}+2 & -\frac{1}{2}-\frac{3}{4} \end{pmatrix}\right| = 2{,}6875$

maka L_4 = 5,84375 sataun luas. Jadi luas segi-11 ini adalah

$L_{11} = L_5 + L_6 + L_4$ = 25,32295 satuan luas.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas dapat ditarik kesimpulan-kesimpulan berikut.

1. Luas segi-n cembung $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ jika koordinat titik sudutnya $A_i(x_i, y_i)$, i = 1, 2, ..., n adalah $L_n = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\left|\det\begin{pmatrix} x_i - x_1 & y_i - y_1 \\ x_{i+1} - x_1 & y_{i+1} - y_1 \end{pmatrix}\right|$.
2. Jika suatu segi-n adalah segi-n cekung yang mempunyai titik sudut sehingga semua diagonal dari titik sudut ini terletak didalam atau pada segi-n ini, maka luasnya dapat ditentukan dengan hubungan pada kesimpulan 1 setelah mengambil $A_1(x_1, y_1)$ sebagai titik sudut cekungnya.
3. Jika segi-n cekung tidak mempunyai titik sudut sehingga semua diagonal dari titik sudut ini terletak didalam atau pada segi-n ini, maka segi-n ini dibagi menjadi segi-n_m; m = 1, 2, ..., k bagian sehingga; a. setiap dua segi-n_m bagian yang berdekatan hanya bersekutu pada satu sisi dan b. setiap segi-n_m terdapat titik sudut yang semua diagonal dari titik sudut ini terletak didalam atau pada segi-n_m ini. Jadi luas setiap segi-n_m; m = 1, 2, ..., k dapat lagi ditentukan dengan hubungan pada kesimpulan 1. Jika luas setiap segi-n_m; m = 1, 2, ..., k adalah A_m, maka luas segi-n cekung ini adalah $L_n = \sum_{m=1}^{k} A_m$.
4. Hubungan n_m dengan n dari kesimpulan 3 adalah $\sum_{m=1}^{k} n_m = n + 2(k-1)$.

DAFTAR RUJUKAN

Arapu, La. 2010. *Geometri Analitik Datar*, Cetakan pertama. Scientia Publishing. Gresik, Surabaya.

Moise, Edwin E. 1970. *Elementary Geometry from an Advance Stand Point*. Addisa Weslay Publishing Company, Massachussets.

Wallace, Edward C. & West, Stephen F. 1992. *Roads to Geometry*. A Simon and Schuster Company, Englewood Cliffs, New Jersey.